

Hoja 7. Relaciones de Recurrencia

Susana Cubillo (2017)

*Ejercicios recopilados de los apuntes y
Hojas de problemas de los profesores
del Dpto. Matemática Aplicada a las TIC
(Campus Montegancedo). UPM.*

1. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:

- a) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$.
- b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.
- c) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$.
- d) $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$, con $n \geq 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$.
- e) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, con $n \geq 3$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$.
- f) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.
- g) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = -6$.

Sol.:

- a) $a_n = (3 - n) \cdot 2^{n+1}$
- b) $a_n = -5^n + 3 \cdot 2^n$
- c) $a_n = 4 - 3n$
- d) $a_n = 3 - (-5)^n$
- e) $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$
- f) $a_n = -8 \cdot 3^n + 9 \cdot 2^n$
- g) $a_n = (1 + n)(-3)^n$

2. Sea a_n el número de palabras de longitud n formadas con los dígitos $\{0,1\}$, que no tienen dos ceros consecutivos. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

$$\text{Sol.: } \begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 2, a_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Fórmula explícita: } a_n = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

3. Halla una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones, si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

$$\text{Sol.: } \begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Fórmula explícita: } a_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

4. Sean n rectas trazadas en el plano de forma que cada recta corte a las restantes, pero que no haya tres coincidentes. Para cada $n \geq 0$, sea a_n el número de regiones en que las n rectas dividen al plano y sea b_n el número de regiones infinitas.
- a) Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.
- b) Encuentra una relación de recurrencia para calcular b_n y resuélvela.

$$\text{Sol.: a) } \begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Sol. ecuación homogénea: } S(n) = A$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + A$$

$$\text{Sol. Final con las condiciones particulares: } a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$$

$$\text{b) } \begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2 \\ b_1 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Sol. ecuación homogénea: } S(n) = A$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = 2n$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = 2n + A$$

$$\text{Sol. Final con las condiciones particulares: } a_n = 2n$$

5. Problema de las Torres de Hanoi (Édouard Lucas): Se tienen n discos y 3 estacas. Los discos están apilados en la estaca 1, ordenados de mayor a menor. El objetivo es pasar los discos uno por uno a otra estaca, colocados en el orden original. En el proceso no se permite que un disco mayor se coloque sobre otro menor. Si a_n es el número de movimientos que se requieren para hacer esto, encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n , y resuélvela.

$$\text{Sol.: } \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Sol. ecuación homogénea: } S(n) = A \cdot 2^n$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = -1$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = -1 + A \cdot 2^n$$

$$\text{Sol. Final con las condiciones particulares: } a_n = -1 + 2^n$$

6. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia no homogéneas, con sus condiciones iniciales:

$$\text{a)} \begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3n^2 \\ a_0 = 7 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 7^n \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 3^n \\ a_0 = 2 \end{cases} \quad \text{e)} \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2 \\ a_0 = 11, a_1 = 1, a_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n \\ a_0 = 1, a_1 = 3 \end{cases} \quad \text{g)} \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 5 \cdot 4^n \\ a_0 = 1, a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{h)} \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \\ a_1 = 2, a_2 = 3 \end{cases} \quad \text{i)} \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5 \cdot 2^n \\ a_0 = 2, a_1 = 4 \end{cases}$$

Sol.:

$$\text{a)} \begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad \text{Sol. ecuación homogénea: } S(n) = C$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = n^2$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = n^2 + C$$

$$\text{Sol. Final con las condiciones particulares: } a_n = n^2$$

$$\text{b)} \begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3n^2 \\ a_0 = 7 \end{cases} \quad \text{Sol. ecuación homogénea: } S(n) = C$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + C$$

$$\text{Sol. Final con las condiciones particulares: } a_n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + C$$

$$\text{c)} \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 7^n \\ a_0 = 2 \end{cases} \quad \text{Sol. ecuación homogénea: } S(n) = A \cdot 3^n$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = \frac{35}{4} \cdot 7^n$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = \frac{35}{4} \cdot 7^n + A \cdot 3^n$$

$$\text{Sol. Final con las condiciones particulares: } a_n = \frac{35}{4} \cdot 7^n - \frac{27}{4} \cdot 3^n = \frac{35}{4} \cdot (7^n - 3^n)$$

$$\text{d)} \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 3^n \\ a_0 = 2 \end{cases} \quad \text{Sol. ecuación homogénea: } S(n) = A \cdot 3^n$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = 5 \cdot n \cdot 3^n$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = 5 \cdot n \cdot 3^n + A \cdot 3^n$$

$$\text{Sol. Final con las condiciones particulares: } a_n = 5 \cdot n \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n = (5n + 2) \cdot 3^n$$

$$e) \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2 \\ a_0 = 11, a_1 = 1, a_2 = -1 \end{cases} \quad \text{Sol. Ec. homogén: } S(n) = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot (-1)^n$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{9}{2} \cdot n + 12$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{9}{2} \cdot n + 12 + A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot (-1)^n$$

$$\text{Sol. Final con las cond. Particul.: } a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{9}{2} \cdot n + 12 - 5 \cdot 2^n - n \cdot 2^n + 4 \cdot (-1)^n$$

$$f) \begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n \\ a_0 = 1, a_1 = 3 \end{cases} \quad \text{Sol. ecuación homogénea: } S(n) = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = n + 4$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = n + 4 + A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n$$

$$\text{Sol. Final con cond. Partic.: } a_n = n + 4 - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot n \cdot 2^n = n + 4 + (-3 + 2n) \cdot 2^n$$

$$g) \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 5 \cdot 4^n \\ a_0 = 1, a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{Sol. ecuación homogénea: } S(n) = A \cdot 4^n + B \cdot (-1)^n$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = -n \cdot 4^{n+1}$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = -n \cdot 4^{n+1} + A \cdot 4^n + B \cdot (-1)^n$$

$$\text{Sol. Final con cond. Partic.: } a_n = -n \cdot 4^{n+1} + \frac{17}{5} \cdot 4^n - \frac{12}{5} \cdot (-1)^n$$

$$h) \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \\ a_1 = 2, a_2 = 3 \end{cases} \quad \text{Sol. ecuación homogénea: } S(n) = A + Bn$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + A + Bn$$

$$\text{Sol. Final con cond. Partic.: } a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + 2 - \frac{1}{2} \cdot n$$

$$i) \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5 \cdot 2^n \\ a_0 = 2, a_1 = 4 \end{cases} \quad \text{Sol. ecuación homogénea: } S(n) = A \cdot 2^n + B$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = 10 \cdot n \cdot 2^n$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = 10 \cdot n \cdot 2^n + A \cdot 2^n + B$$

$$\text{Sol. Final con cond. Partic.: } a_n = 10 \cdot n \cdot 2^n - 18 \cdot 2^n + 20$$

7. Sea $M = \{A, B, C\}$ y sea S_n el conjunto de sucesiones de longitud n , formadas con las letras de M , en las que todas las cadenas de A-es son de longitud par. Encuentra una relación de recurrencia para calcular S_n y resuélvela.

$$\text{Sol.: } \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 2, a_2 = 5 \end{cases} \quad a_n = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \cdot (1+\sqrt{2})^n + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot (1-\sqrt{2})^n$$

8. Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar cuántas son las banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

a) No hay restricciones sobre el color de cada franja. Sol.: 4^n

b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.

$$\text{Sol.: } 4 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = 4 \cdot 3^{n-1}$$

c) Sea a_n el número de banderas que se pueden formar con n franjas horizontales, con los cuatro colores dados y tales que dos franjas adyacentes no sean del mismo color ni tampoco sean del mismo color la primera y la última franja. Hallar una relación de recurrencia para a_n . (Indicación: Hacer $n = 4$ y generalizar para n , con $a_1 = 0$.)

$$\text{Sol.: } \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ a_1 = 0, a_2 = 12 \end{cases}$$

d) Resolver la ecuación de recurrencia obtenida en el apartado anterior

$$\text{Sol.: } a_n = 3^n + 3(-1)^n$$

9. Halla, mediante una relación de recurrencia, la suma $a_n = \sum_{k=0}^n 2^k$, en función de n .

$$\text{Sol.: } a_n = \sum_{k=0}^n 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + 2^n = a_{n-1} + 2^n$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2^n \\ a_1 = 3 \end{cases} \quad \text{Sol. ecuación homogénea: } S(n) = A$$

$$\text{Sol. Particular de la completa: } P(n) = 2 \cdot 2^n$$

$$\text{Sol. General de la completa: } a_n = 2 \cdot 2^n + A$$

$$\text{Sol. Final con cond. Partic.: } a_n = 2^{n+1} - 1$$

10. Hallar una relación de recurrencia para el número de listas a_n de longitud n formadas con los elementos 0, 1 y 2, en las que el elemento 1 no aparece nunca en el lugar posterior a un 2.

$$\text{Sol.: } \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_1 = 3, a_2 = 8 \end{cases}$$

11. Sea $g(n) = \binom{n}{k}$, donde ambos números son naturales, $n \geq k$, y k fijo. Sabiendo que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, obtener una relación de recurrencia para calcular $g(n)$.

$$\text{Sol.: } \begin{cases} g(n) = \frac{n}{n-k} g(n-1) \\ g(k) = \binom{k}{k} = 1 \end{cases}$$

12. Sea $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$

- a) Halla una relación de recurrencia para la sucesión cuyo término general es $D_n = \det A_n$

$$\text{Sol.: } \begin{cases} D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} \\ D_1 = 2, D_2 = 3 \end{cases}$$

- b) Resuelve la relación de recurrencia $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} + 1$, con las condiciones iniciales $D_1 = 2, D_2 = 3$.

$$\text{Sol.: } D_n = 2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

13. Se tiene una cantidad ilimitada de cubos de lado 1cm., 2 cm. y 4 cm., y se quiere construir una torre apilando cubos. Encuentra una relación de recurrencia para hallar el número de formas distintas T_n de construir una torre de altura n cms.

$$\text{Sol.: } \begin{cases} T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-4} \\ T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 3, T_4 = 6 \end{cases}$$